

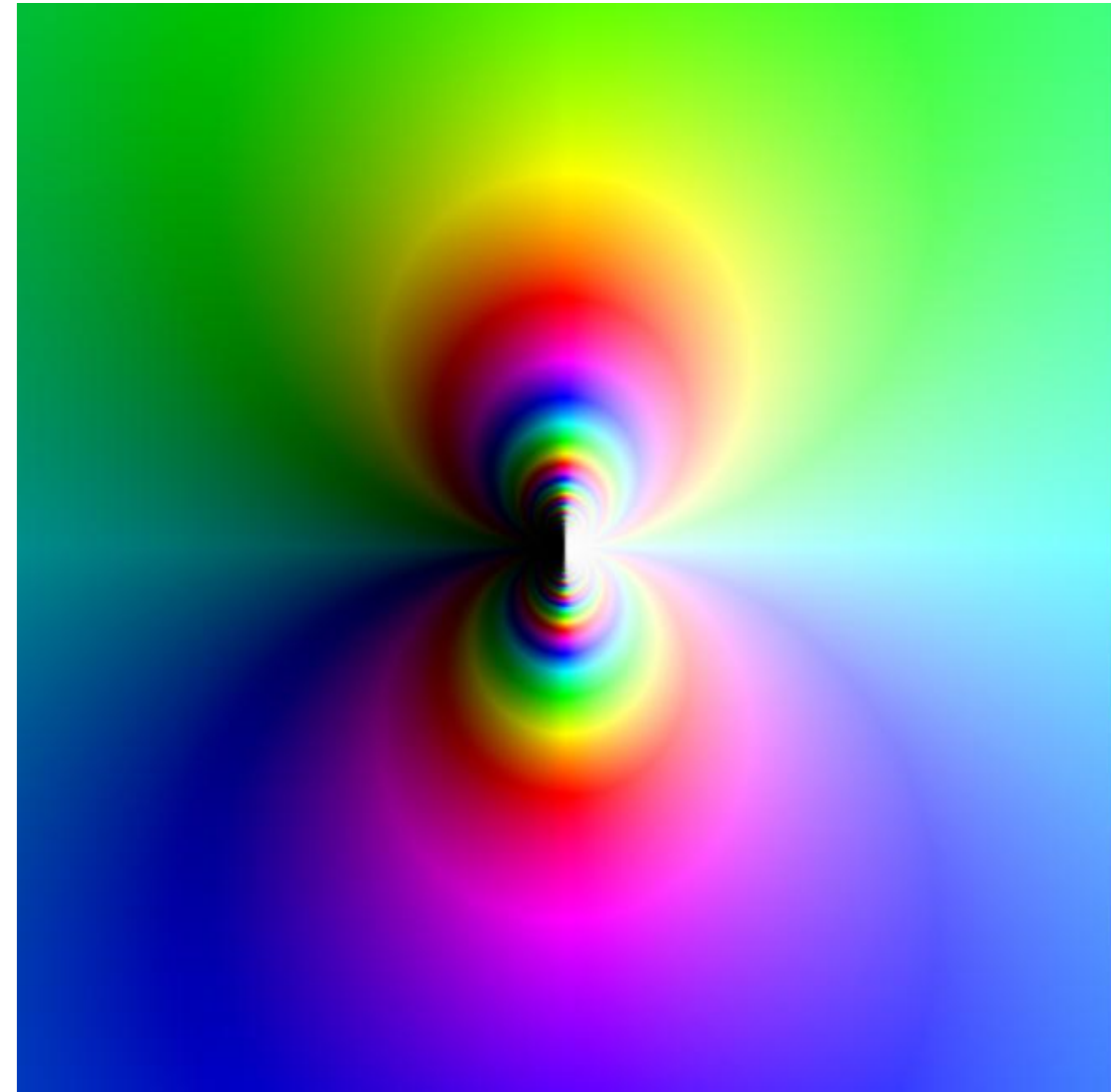
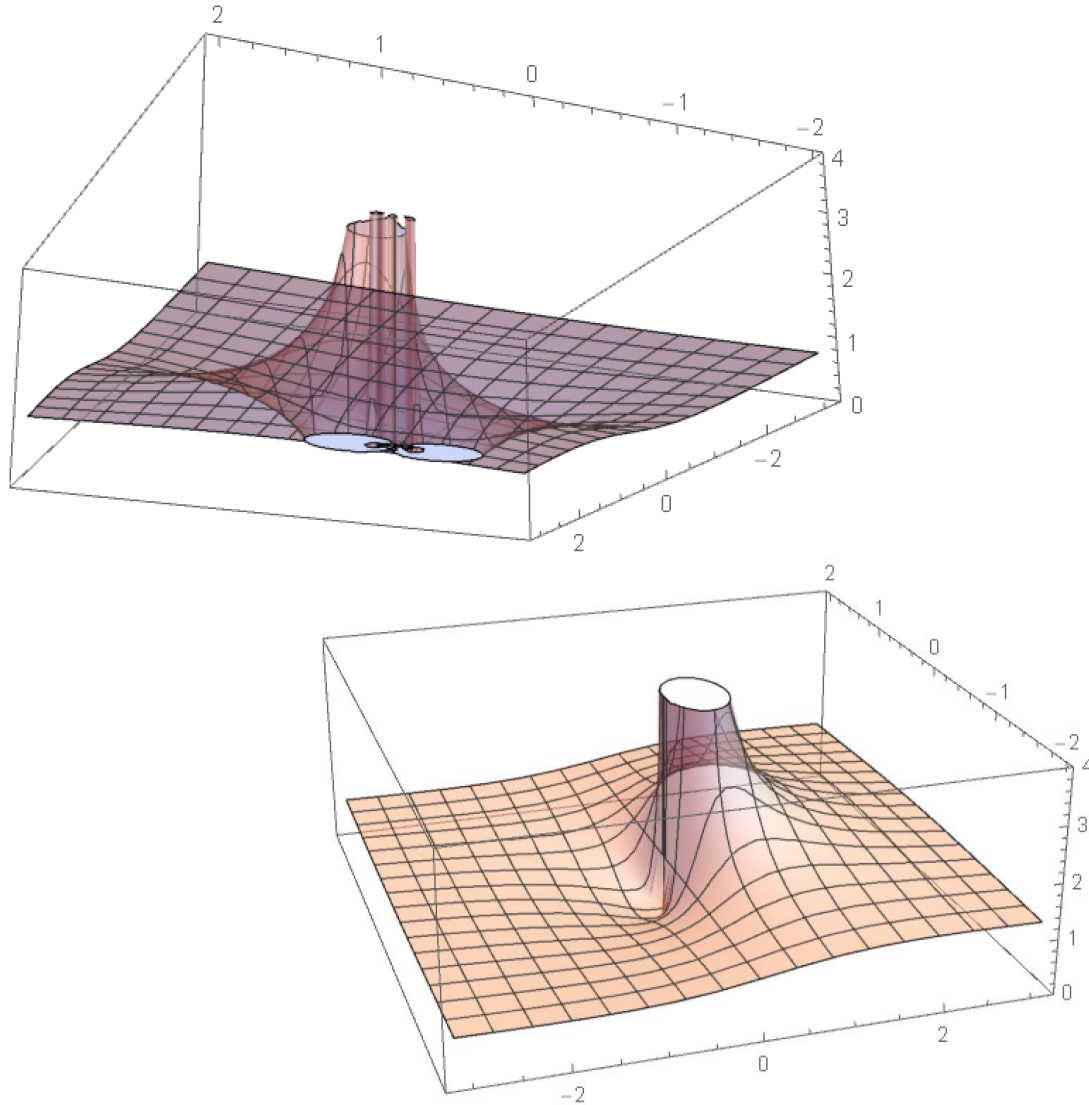
Лекция 13.03.2026.

Аналитическое продолжение

Теория функций комплексного переменного

Функция $e^{\frac{1}{z}}$, особенность в 0

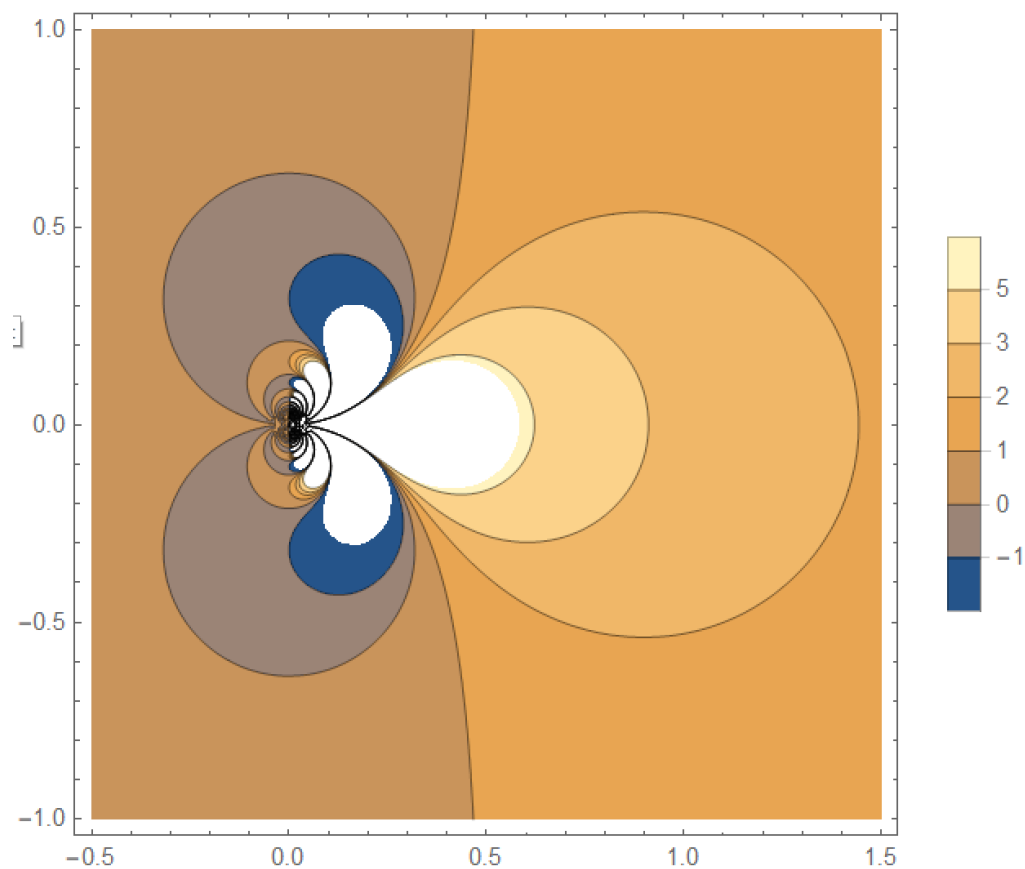
Автор: Functor Salad -
собственная работа, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2683670>



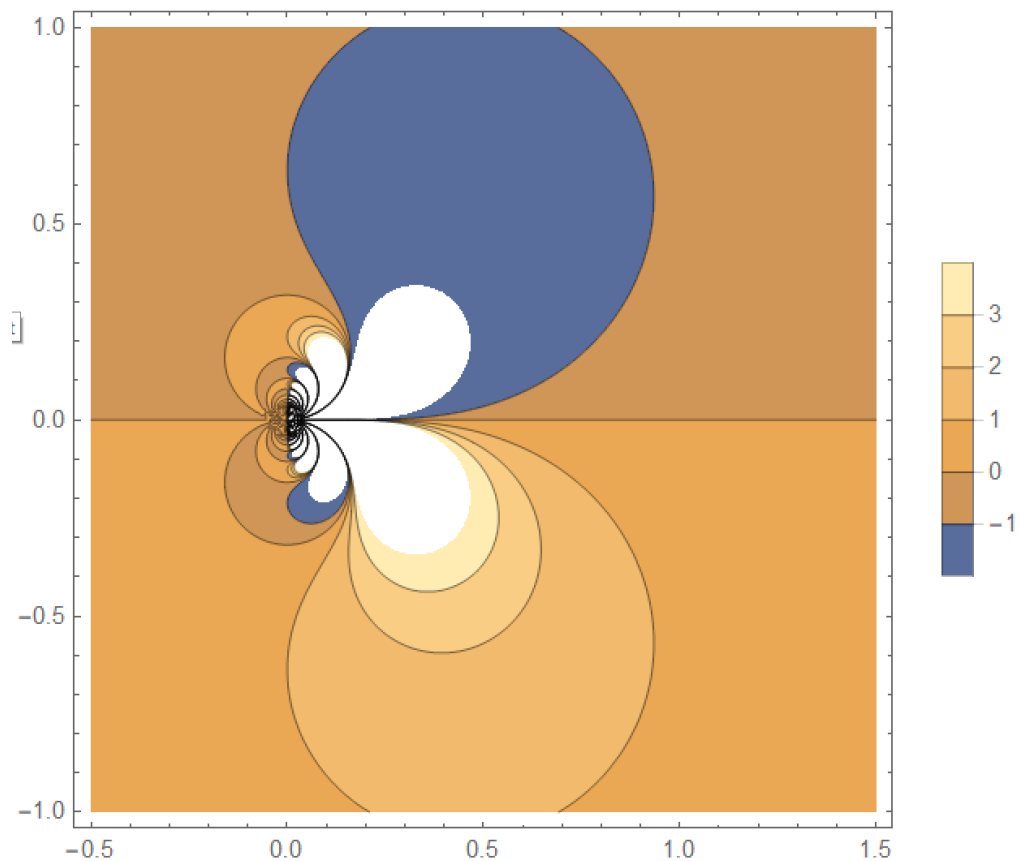
$$\operatorname{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right),$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$$

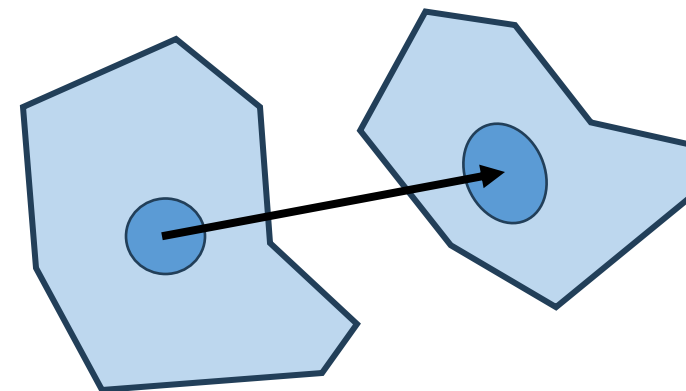
```
ContourPlot[Re[Exp[1 / (x + I y)]], {x, -.5, 1.5}, {y, -1, 1},  
Contours -> {-1, 0, 1, 2, 3, 5, 100},  
MaxRecursion -> 3, PlotLegends -> Automatic]
```



```
ContourPlot[Im[Exp[1 / (x + I y)]], {x, -.5, 1.5}, {y, -1, 1},  
Contours -> {-5, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 100},  
MaxRecursion -> 3, PlotLegends -> Automatic]
```



Принцип сохранения области



- Пусть $f(z) = z^k + o(z^k)$ ($k > 0$) в окрестности точки 0.
- Тогда f делает k оборотов вокруг 0, если z один раз обходит окружность $z = \varepsilon \cdot e^{2\pi it}$ ($t \in [0; 1]$) – по теореме Руше (ε мало).
- Для всякого $w \in B_{\varepsilon/2}(0)$, уравнение $f(z) = w$ имеет $k > 0$ решений в $B_\varepsilon(0)$, если ε достаточно мало.

Теорема. *Непостоянное голоморфное отображение отображает открытые множества на открытые множества, т.е. является открытым отображением.*

Теорема об обратной функции

Предложение 9.2 (теорема об обратной функции). Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $f'(a) \neq 0$ в точке $a \in \mathbb{C}$. Тогда существуют такие открытые множества $U_1 \ni a$ и $V_1 \ni f(a)$, что $f(U_1) = V_1$ и f индуцирует биекцию U_1 на V_1 , причем обратное отображение $f^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$ также голоморфно.

- Достаточно, чтобы жорданова кривая ∂U_1 отображалась в жорданову кривую ∂U_2 взаимно однозначно с сохранением ориентации. (По принципу аргумента).

Нормальная форма голоморфной функции

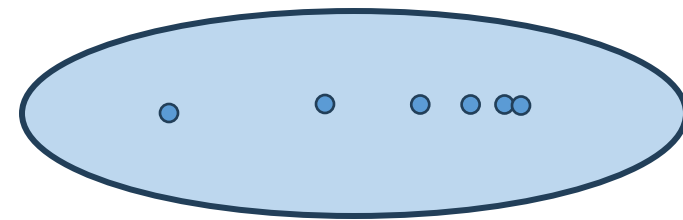
Теорема. Пусть f голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $f(a) = b$. Существуют локальные голоморфные координаты u, v в окрестностях точек a, b , в которых f задается формулой $v = u^k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Набросок доказательства.

- $f(z) = b + (z - a)^k g(z)$ вблизи т. a ,
- $g(z) = h(z)^k$,
- $f(z) - b = ((z - a)h(z))^k$,
- Положим $\alpha(z) = (z - a)h(z)$, $\beta(w) = w - b$.

$$\begin{array}{ccc} (U, a) & \xrightarrow{f} & (V, b) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ (\alpha(U), 0) & \xrightarrow{v=u^k} & (\beta(V), 0) \end{array}$$

Теорема единственности



- Всякий нуль голоморфной функции изолирован: $f(z) = (z - a)^k g(z) \neq 0$ в той окрестности точки a , в которой $g \neq 0$.
- Если $f \in H(U)$ и $f(z_n) = 0$, то последовательность z_n не может накапливаться к внутренней точке области U .

Теорема единственности. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – область (=связное открытое множество). Если $f, g \in H(U)$, причем $f = g$ на неискретном подмножестве $Z \subset U$, то $f = g$ всюду на U .

Голоморфная функция определяется своими значениями в любой, сколь угодно малой окрестности.

Росток функции

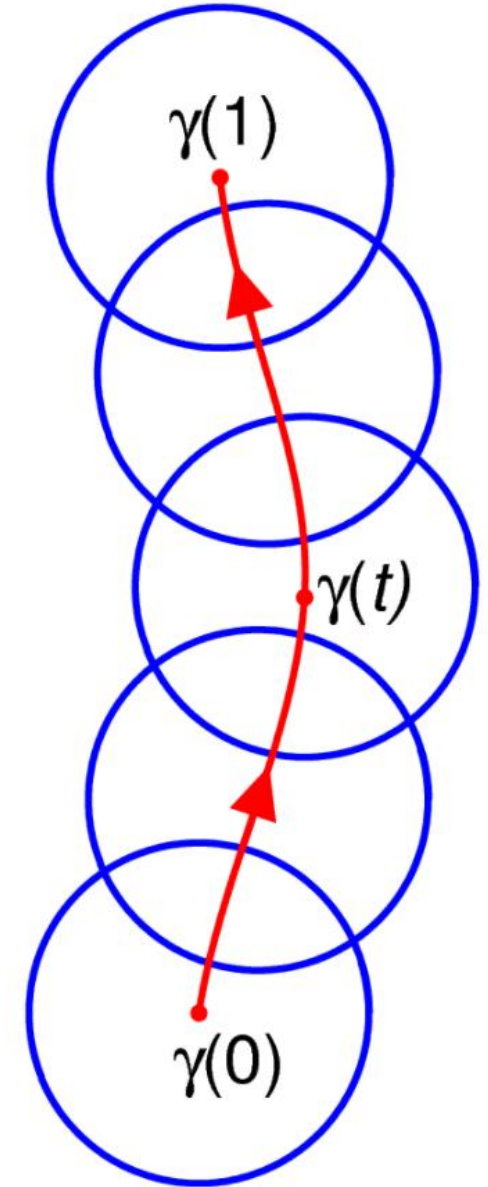
Для данной точки $p \in \mathbb{C}$ рассмотрим множество всех пар (U, f) , где $U \ni p$ — окрестность и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пары (U_1, f_1) и (U_2, f_2) будем называть эквивалентными, если функции f_1 и f_2 совпадают на некоторой окрестности точки p .

Определение 6.6. *Ростками* голоморфных функций в точке p называются классы эквивалентности пар (U, f) относительно этого отношения эквивалентности; класс эквивалентности пары (U, f) называется *ростком функции f в точке p* .

Множество ростков голоморфных функций в точке p обозначается $\mathcal{O}_p$.

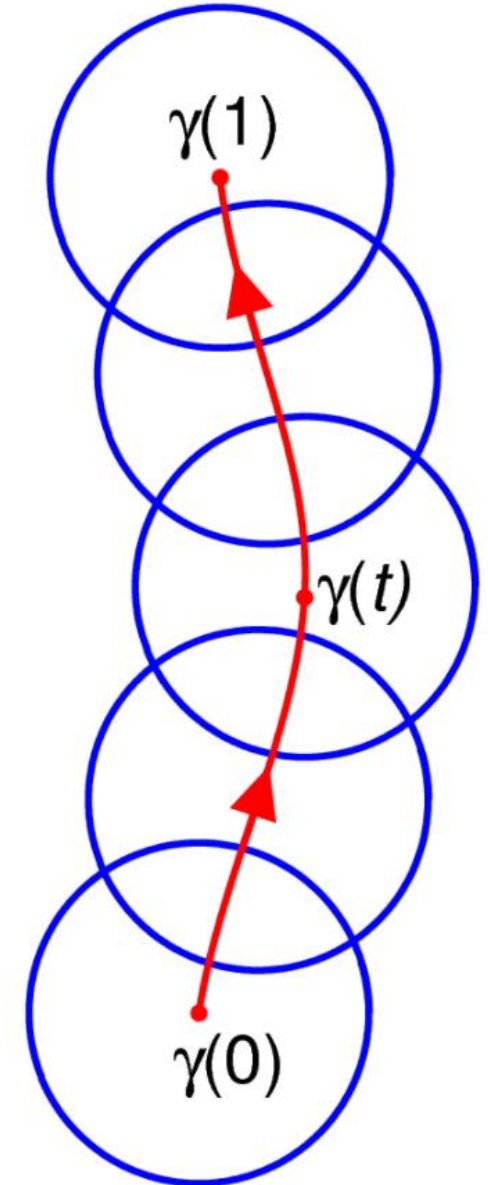
Аналитическое продолжение

- Имеется естественный изоморфизм между $\mathcal{O}_p$ и степенными рядами с центром в p и **положительным радиусом сходимости**.
- Пусть путь γ покрыт конечным числом открытых дисков D_i с центрами в точках $\gamma(t_i)$ и радиусами $r_i > 0$ т.ч. $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ и $\gamma[t_{i-1}; t_{i+1}] \subset D_i$ при $i = 1, \dots, n-1$.
- Допустим, s_i – сходящийся в i -м диске степенной ряд с центром $\gamma(t_i)$, т.ч. s_i и s_{i+1} сходятся на пересечении соотв. дисков к одинаковой сумме.



Аналитическое продолжение II

- Пусть $f_i: D_i \rightarrow \mathbb{C}$ – сумма ряда s_i .
- Тогда говорят, что функции f_0 в точке $\gamma(0)$ **аналитически продолжается вдоль γ** .
- Пусть $\Gamma(t)$ – росток функции f_i в точке $\gamma(t) \in D_i$. Тогда все ростки $\Gamma(t)$ являются аналитическими продолжениями друг друга вдоль соответствующих отрезков пути γ .



Переразложение ряда

- Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда

$$s_a(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots$$

- Возьмем точку $b \in \mathbb{D}(a, R)$ и **переразложим** этот ряд с центром в этой точке:

$$\begin{aligned} s_b(z) &= s_a(b + (z - b)) \\ &= (c_0 + c_1(b - a) + c_2(b - a)^2 + \dots) \\ &\quad + (c_1 + 2c_2(b - a) + \dots)(z - b) + (c_2 + \dots)(z - b)^2 + \dots \\ &= d_0 + d_1(z - b) + d_2(z - b)^2 + \dots \end{aligned}$$

- Коэффициенты d_n задаются формулой $d_n = \frac{s_a^{(n)}(b)}{n!}$.
- Ряд s_{i+1} получается из s_i переразложением.

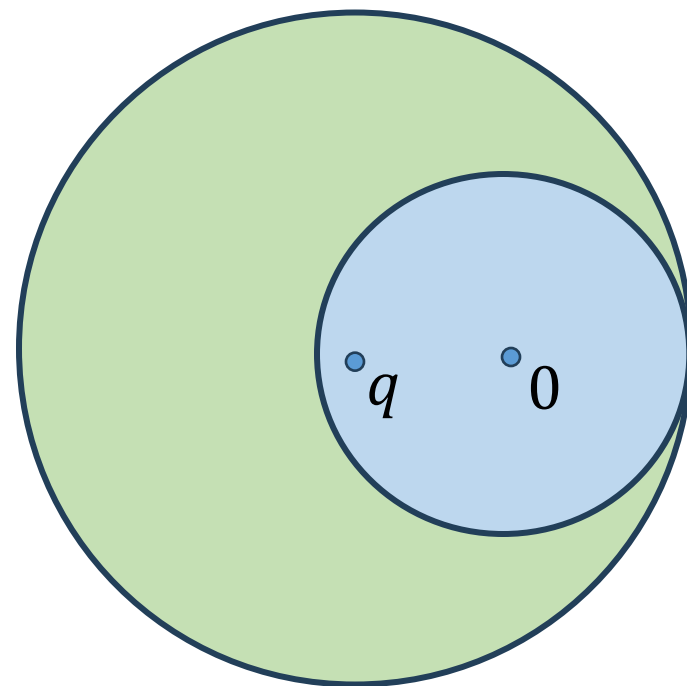
Пример

$$s(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z} \quad \text{при } |z| < 1$$

Пусть $|q| < 1$. Тогда $s(z) = \frac{1}{(1-q)-(z-q)} =$

$$= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-q}{1-q}} =$$

$$= \frac{1}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-q)^n}{(1-q)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-q)^n}{(1-q)^{n+1}} \quad \text{при } |z-q| < |1-q|.$$



Важно:

- Аналитическому продолжению подвергаются **ростки**, а не значения функции (бывает так, что значения совпадают, а ростки разные).
- Аналитическое продолжение бывает и над вещественными числами. Например, можно аналитически продолжать ростки «функции» угол на окружности.
- Теория аналитического продолжения почти алгебраическая. Из анализа нужна только сходимость ряда.

Карл Вейерштрасс (1815 – 1897)

- Определение непрерывной функции
- Теория эллиптических функций
- Теория аналитического продолжения
- Вариационное исчисление,
дифференциальная геометрия, линейная
алгебра



Композиция аналитического продолжения и голоморфной функции

Следствие 6.13. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь, соединяющий точки p и q , вдоль которого возможно аналитическое продолжение ростка $f \in \mathcal{O}_p$ в росток $g \in \mathcal{O}_q$. Если V — открытое множество, содержащее $\gamma([A; B])$, и $\varphi: V \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, то вдоль γ возможно аналитическое продолжение ростка $\varphi \circ f$ в росток $\varphi \circ g$.

Доказательство: Каждая из функций $\varphi \circ f_i$ разлагается в сходящийся степенной ряд в диске D_i .

Единственность аналитического продолжения

Предложение 6.14. Пусть $\gamma: [A; B] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь на комплексной плоскости, соединяющий точки $p = \gamma(A)$ и $q = \gamma(B)$. Если аналитическое продолжение ростка $f \in \mathcal{O}_p$ вдоль пути γ существует, то оно единственно.

Идея доказательства. Рассмотрим два покрытия пути γ дисками D_i и D'_j . Расположим все эти диски по порядку. Убедимся в том, что семейство $\Gamma(t)$ одно и то же (по теореме единственности).

Теорема о монодромии

Предложение 6.15. Пусть $F : [A; B] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — гомотопия с закрепленными концами путей, соединяющих точки p и q , так что $F(A, s) = p$ для всех $s \in [0; 1]$ и $F(B, s) = q$ для всех $s \in [0; 1]$. Пусть $f \in \mathcal{O}_p$ — росток голоморфной функции в точке p , и предположим, что f допускает аналитическое продолжение вдоль каждого промежуточного пути $\gamma_s : t \mapsto F(t, s)$.

Тогда результаты аналитических продолжений ростка f вдоль всех путей γ_s (в частности, вдоль путей γ_0 и γ_1) совпадают.

- Достаточно доказать для близких путей.
- Они покрываются одной и той же последовательностью дисков.

Однозначная ветвь

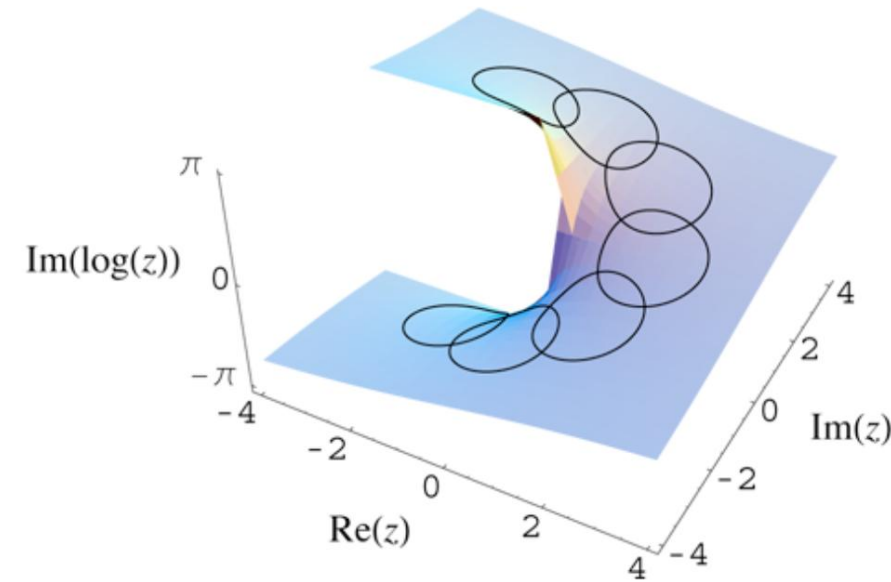
Теорема. *Если росток голоморфной функции в точке $a \in \mathbb{C}$ допускает аналитическое продолжение в каждую точку некоторой **односвязной** области $U \ni a$, то все эти аналитические продолжения являются ростками одной и той же голоморфной функции на U .*

Это вытекает из теоремы о монодромии.

Примеры. На множестве $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ определены однозначные ветви функций $\sqrt{z}$, $\sqrt[n]{z}$, $\log z$.

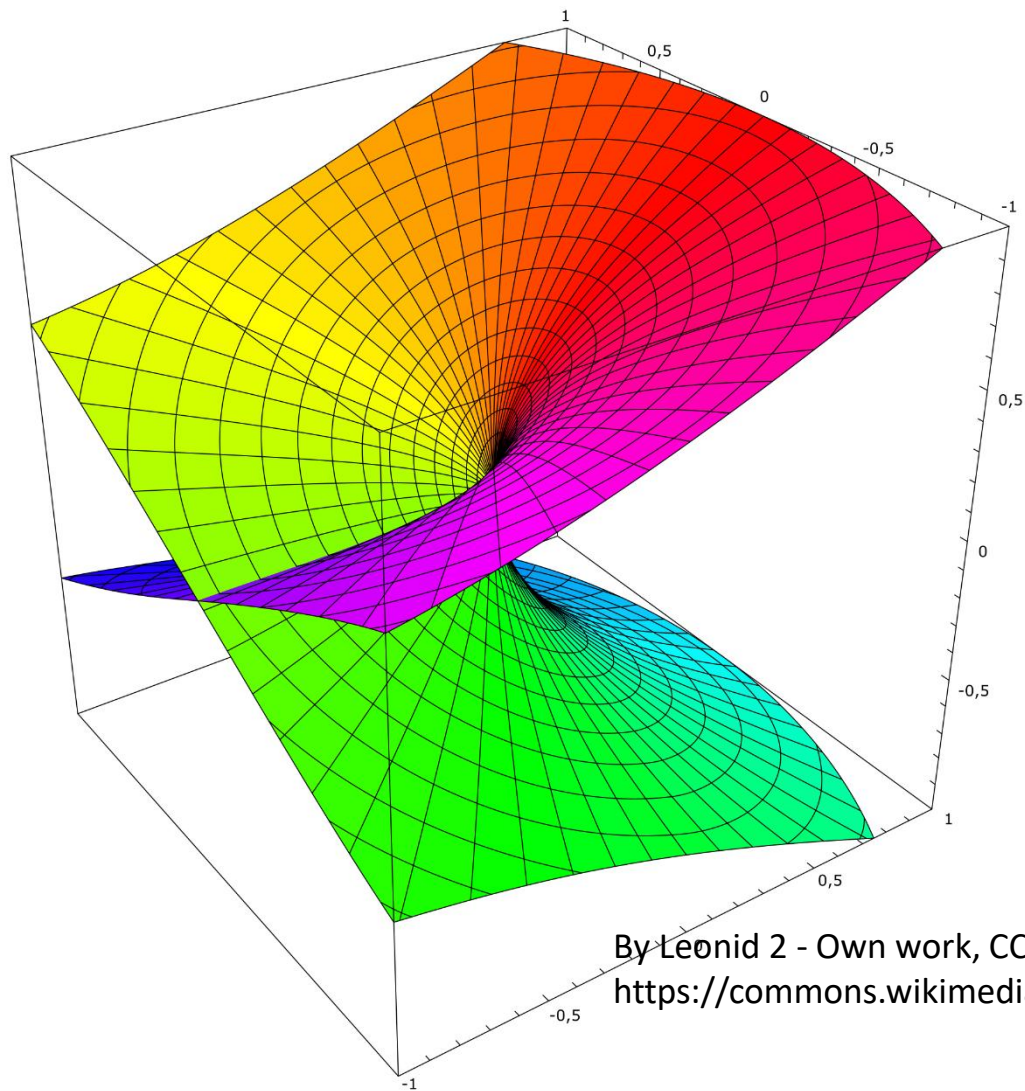
Многозначная аналитическая функция

- Множество всех ростков, полученных из данного аналитическими продолжениями вдоль всевозможных путей.
- Примеры: $\sqrt[n]{z}$, $\log z$, $\arcsin z$, $z^a = e^{(\log z)a}$, ...
- $a^z = e^{(\log a)z}$ **НЕ** является многозначной аналитической функцией (это разные однозначные функции в зависимости от ветви логарифма).
- **Значения** многозначной аналитической функции иногда можно определить и в тех точках, в которые нельзя продолжить ростки. Например, $\sqrt{0} = 0$.

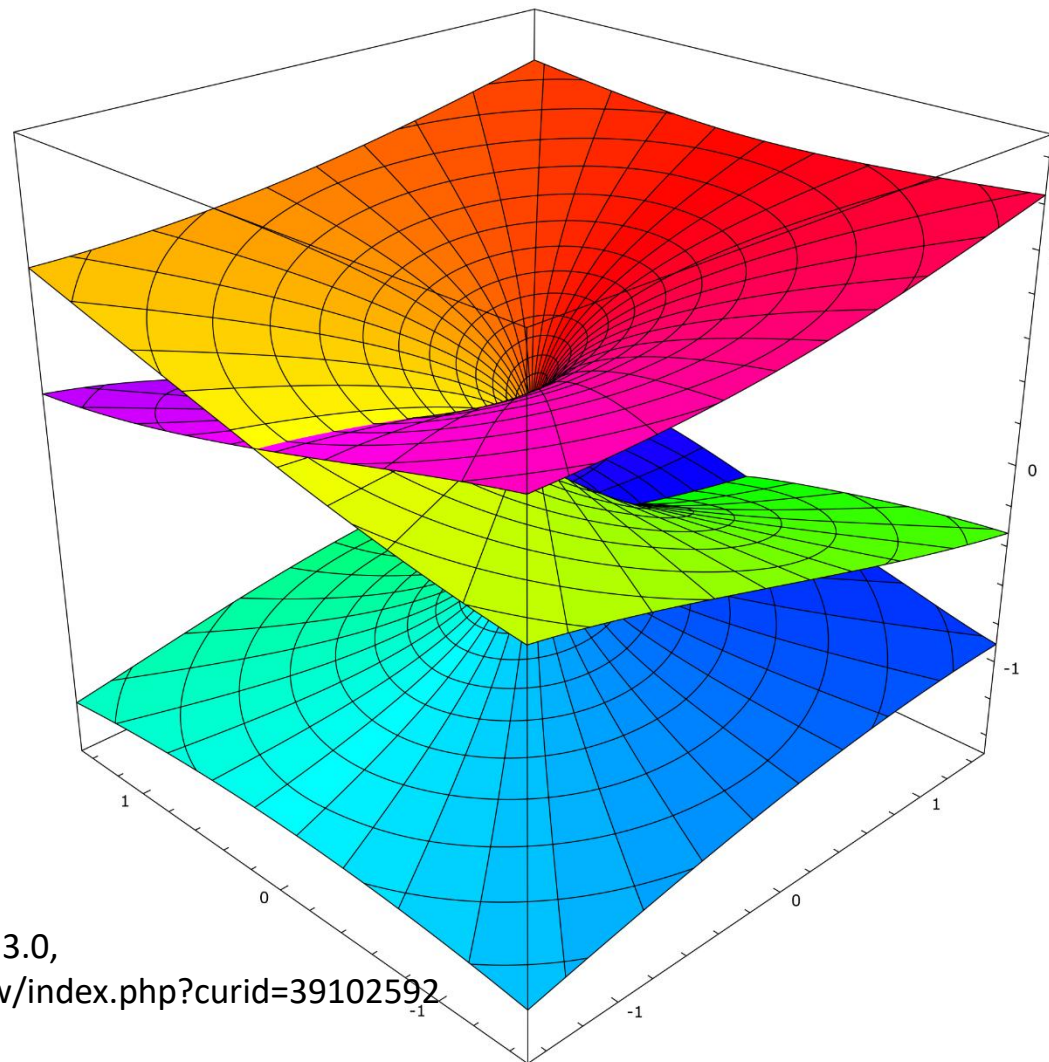


By YAMASHITA Makoto - Own work, CC BY 2.5,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1063792>

$$\sqrt{z}$$



$$\sqrt[3]{z}$$



By Leonid 2 - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39102592>



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ